ВАРИАНТ 4

Вариант № 34184535

Решение заданий с развернутым ответом

Задание 1 № 77336

Поезд Новосибирск-Красноярск отправляется в 15:20, а прибывает в 4:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

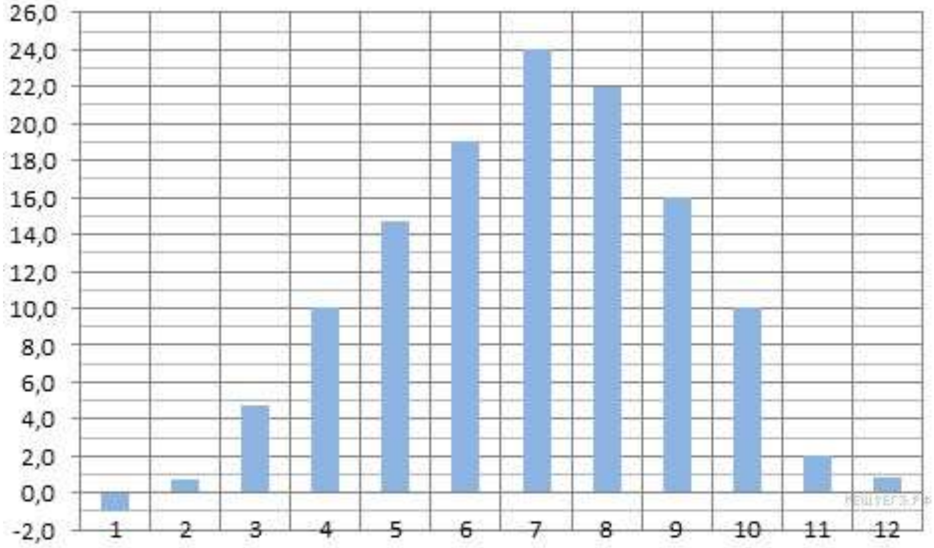
Решение.

В день отправления поезд едет 24:00 − 15:20 = 8 час. 40 мин., а на следующий день до момента прибытия он едет 4 час. 20 мин. Всего в пути поезд проведет 8:40 + 4:20 = 13 часов.

Ответ: 13.

Задание 2 № 27521

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 20 градусов Цельсия.



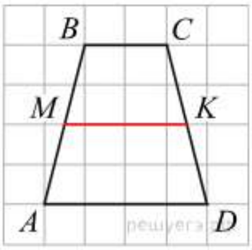
Решение.

Из диаграммы видно, что было 2 месяца, когда среднемесячная температура превышала 20 градусов Цельсия (см. рисунок).

Ответ: 2.

Задание 3 № 27848

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Решение.

Средняя линия трапеции равна полусумме её оснований:

$$MK = \frac{AD + BC}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

Задание 4 № 320197

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

Решение.

Указанные события противоположны, поэтому искомая вероятность равна $1 - 0,81 = 0,19$.
Ответ: 0,19.

Задание 5 № 77370

Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.

Решение.

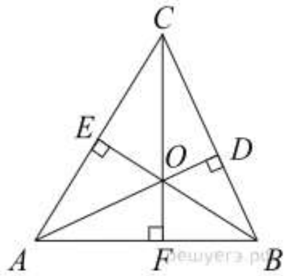
Воспользуемся формулой $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$x^2 + 9 = (x+9)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = x^2 + 18x + 81 \Leftrightarrow 18x = -72 \Leftrightarrow x = -4$.

Ответ: −4.

Задание 6 № 27779

В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 82°. AD, BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Угол между высотами равен углу между сторонами, к которым они проведены:

$\angle AOF = \angle B = 82°$

Ответ: 82.

Задание 7 № 525703

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = f'(x) - f(x) + 3$ в точке x_0.

Решение.

Найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0) = k = -\frac{1}{4}.$$

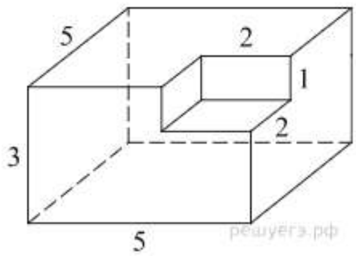
Тогда искомое значение

$$g(x_0) = f'(x_0) - f(x_0) + 3 = -\frac{1}{4} - 2 + 3 = 0,75$$

Ответ: 0,75.

Задание 8 № 25601

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение.

Площадь поверхности заданного многогранника равна площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 3, 5, 5:

$$2\cdot5\cdot5+2\cdot3\cdot5+2\cdot3\cdot5=110.$$

Ответ: 110.

Задание 9 № 26779

Найдите $24\cos2\alpha$, если $\sin\alpha = -0,2$.

Решение.

Используем формулу косинуса двойного угла $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. Имеем:

$$24\cos 2\alpha = 24(1-2\cdot 0{,}04) = 24\cdot 0{,}92 = 22{,}08$$

Ответ: 22,08.

Задание 10 № 28011

Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $u \ge 0{,}25$ на интервале $(0°;90°)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$u \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{m}{m+M} v\cos\alpha \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{80}{80+400}\cdot 3\cdot\cos\alpha \ge 0{,}25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos\alpha \ge \frac{1}{4} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 0° < \alpha < 60°$$

Ответ: 60.

Задание 11 № 99602

Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Скорость плота равна скорости течения реки 2 км/ч. Пусть u км/ч – скорость яхты, тогда скорость яхты по течению равна $u+2$ км/ч, а скорость яхты против течения равна $u-2$ км/ч. Яхта, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A, а плоту понадобилось на час больше времени, чтобы пройти 24 км.

$$\frac{120}{u+2} + \frac{120}{u-2} + 1 = \frac{24}{2} \Leftrightarrow \frac{240}{u^2-4} = 11 \Leftrightarrow 11u^2 - 240u - 44 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{240+\sqrt{240^2+44^2}}{22} = 22; \\ u = \dfrac{240-\sqrt{240^2+44^2}}{22} = -\dfrac{2}{11} \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u = 22.$$

Ответ: 22.

Задание 12 № 26719

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right]$.

Решение.

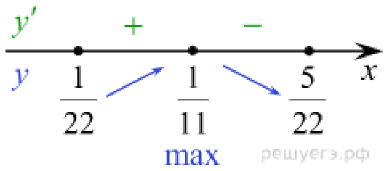
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{1}{11x}\cdot 11 - 11 = \frac{1}{x} - 11.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-11=0, \\ \dfrac{1}{22}\le x\le\dfrac{5}{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{11}, \\ \dfrac{1}{22}\le x\le\dfrac{5}{22} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{11}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=\dfrac{1}{11}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{1}{11}\right)=\ln 1-\frac{1}{11}\cdot 11+9=8.$$

Ответ: 8.

Задание 13 (С1) № 521844

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решите уравнение: $\sqrt[5]{(3x+1)^6}-5\sqrt[5]{(3x+1)^3}+4=0$.

Решение.

Уравнение является квадратным относительно корня:

$$\sqrt[5]{(3x+1)^6}-5\sqrt[5]{(3x+1)^3}+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{(3x+1)^3}=1, \\ \sqrt[5]{(3x+1)^3}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1=1, \\ \sqrt[5]{3x+1}=\sqrt[3]{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 3x+1=\sqrt[3]{4^5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\dfrac{\sqrt[3]{4^5}-1}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{0;\dfrac{\sqrt[3]{4^5}-1}{3}\right\}$.

Задание 14 (С2) № 514474

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б)	2
Выполнен только один из пунктов а) или б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

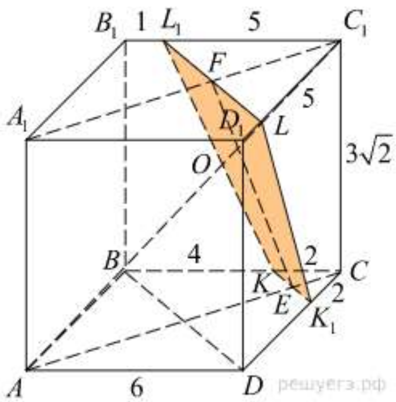
*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и C_1D_1 точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ.

Решение.



а) Так как плоскость γ параллельна диагонали основания BD, то пересекает основание $ABCD$ по прямой KK_1 параллельной BD, K_1 лежит на CD. Так как, $ABCD||A_1B_1C_1D_1$ прямая сечения LL_1 параллельна BD, где L_1 лежит на B_1C_1. Сечением призмы будет трапеция KK_1LL_1.

Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо, чтобы она была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Заметим, что проекцией прямой AC_1 на плоскость $ABCD$ является прямая AC. Кроме того, $AC \perp BD$, как диагонали квадрата, таким образом, по теореме о трех перпендикулярах $AC_1 \perp BD$ следовательно, $AC_1 \perp KK_1$.

Рассмотрим плоскость AA_1C_1C. Пусть эта плоскость пересекает прямые KK_1 и LL_1 в точках E и F соответственно. O – точка пересечения EF и AC_1.

Четырёхугольник AA_1C_1C – прямоугольник, причём

$$AA_1 = 3\sqrt{2},\ AC = 6\sqrt{2},\ EC = \sqrt{2},\ AE = 5\sqrt{2},\ FC_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Так как AA_1C_1C прямоугольник, $\Delta AEO \sim \Delta C_1FO$, $k = \dfrac{AE}{C_1F} = 2$. Значит, $C_1O = \dfrac{AC_1}{3}$, $FO = \dfrac{FE}{3}$. Таким образом,

$$C_1O = \frac{1}{3}\sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{10},\ FO = \frac{1}{3}\sqrt{(FC_1 - CE)^2 + CC_1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Тогда по обратной теореме Пифагора $C_1O^2 + FO^2 = 10 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{25}{2} = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = C_1F^2$, следовательно, треугольник C_1FO прямоугольный, $AC_1 \perp EF$.

Таким образом $AC_1 \perp KK_1LL_1$.

б) Расстояние от точки B_1 до плоскости γ равно расстоянию до нее от любой точки параллельной ей прямой B_1D_1. Из точки M – пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ в плоскости AA_1C_1C опустим перпендикуляр MH на прямую EF. Так как, по доказанному в п. а) $AC_1 \perp KK_1LL_1$, плоскость $AA_1C_1C \perp KK_1LL_1$, следовательно, указанный перпендикуляр –

искомое расстояние. Найдем $MF=\frac{A_1C_1}{2}-FC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Заметим, $\Delta MFH \sim \Delta C_1FO$, $k=\frac{MF}{FC_1}=\frac{1}{5}$. Таким образом $MH=\frac{C_1O}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Задание 15 (C3) № 508559

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решите неравенство: $\frac{320-4^{-x-1}}{128-2^{-x}}\ge 2{,}5$.

Решение.

Сделаем замену $y=2^{-x}$.

$$\frac{320-0{,}25y^2}{128-y}\ge 2{,}5 \Leftrightarrow \frac{-0{,}25y^2+2{,}5y}{128-y}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{0{,}25y(y-10)}{128-y}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le y\le 10 \\ y>128. \end{array}\right.$$

Тогда $0\le 2^{-x}\le 10$ или $2^{-x}>128$, откуда находим множество решений неравенства: $(-\infty;-7)\cup[-\log_2 10;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-7)\cup[-\log_2 10;+\infty)$.

Задание 16 (C4) № 516801

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

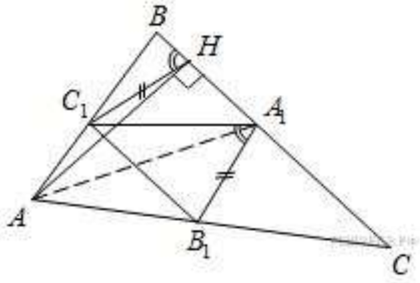
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$

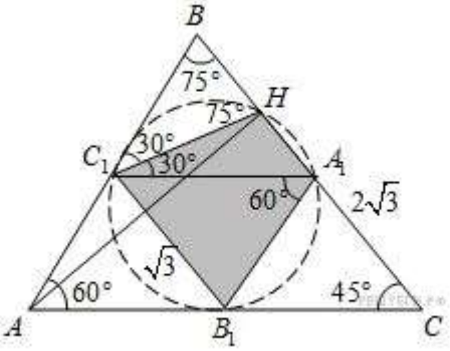
а) Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

Решение.



а) Заметим, что C_1H – медиана прямоугольного треугольника ABH, значит, $C_1H = \frac{1}{2}AB = AC_1 = BC_1$, но и $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ как средняя линия треугольника ABC. Поэтому четырёхугольник $C_1HA_1B_1$ – равнобедренная трапеция, вокруг неё можно описать окружность, а значит, точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать.



б) Середины сторон треугольника являются вершинами подобного ему треугольника. Поэтому верны равенства: $\angle C_1A_1B_1 = \angle A = 60°$, $\angle A_1C_1B_1 = \angle C = 45°$ Кроме того из п. а) $\angle BC_1H = 180° - 2\angle B = 30°$.

Следовательно,

$$\angle HC_1A_1 = \angle BC_1A_1 - \angle BC_1H = 60° - 30° = 30°.$$

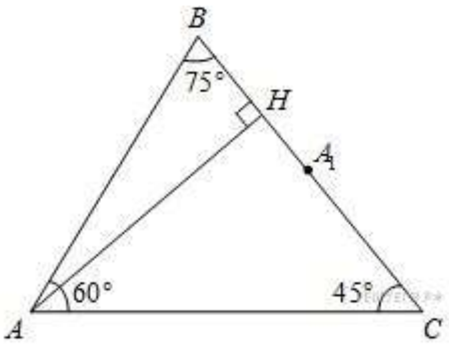
Пусть R – радиус окружности, описанной вокруг трапеции. Эта окружность одновременно описана вокруг треугольников $A_1C_1B_1$ и A_1C_1H. Тогда по теореме синусов для каждого из них, имеем:

$$2R = \frac{HA_1}{\sin\angle HC_1A_1} = \frac{B_1C_1}{\sin\angle C_1A_1B_1},$$

откуда находим $HA_1 = \sqrt{3}\frac{\sin 30°}{\sin 60°} = 1$.

Приведем другое решение пункта а) Так как C_1H – медиана прямоугольного треугольника ABH, треугольник BC_1H равнобедренный, тогда $\angle C_1HB = \angle C_1BH = 75°$, откуда $\angle C_1HA_1 = 105°$. Поскольку $\angle C_1B_1A_1 = \angle ABC = 75°$, сумма противоположных углов четырехугольника $C_1HA_1B_1$ равна 180°, а значит, он является вписанным.

Приведём решение пункта б) без использования пункта а).



Найдем сторону AB треугольника ABC по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}\frac{\sin 45°}{\sin 60°} = 2\sqrt{2}.$$

Найдем катет прямоугольного треугольника AHB:

$$BH = AB\cos 75° = 2\sqrt{2}\cos 75°$$

Тогда длина искомого отрезка A_1H:

$$A_1H = BA_1 - BH = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}\cos 75°.$$

Замечание. Покажем, что полученная длина равна 1. Действительно, поскольку

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

имеем:

$$A_1H = BA_1 - BH = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = 1$$

Ответ: б) 1.

Задание 17 (С5) № 513923

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.

— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.

— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн. рублей.

Решение.

Пусть банк начисляет r процентов, то есть умножает остаток долга на $x = 1 + \frac{r}{100}$ Тогда первые три платежа составляли $4{,}2x - 4{,}2$ миллионов рублей. Пусть, далее, четвертый и пятый платежи составляли N миллионов рублей. Тогда $N = (4{,}2x - N)x$, откуда $N = \frac{4{,}2x^2}{1+x}$. По условию, общие выплаты составили 6,1 млн руб., откуда имеем:

$$3(4{,}2x - 4{,}2) + 2\cdot\frac{4{,}2x^2}{1+x} = 6{,}1 \Leftrightarrow 3(42x - 42) + \frac{84x^2}{1+x} = 61 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{84x^2}{1+x} = 187 - 126x \Leftrightarrow 84x^2 = (1+x)(187-126x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 210x^2 - 61x - 187 = 0 \Leftrightarrow (10x-11)(21x-17) = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1{,}1\,.$$

Тогда $r = 10$.

Ответ: 10.

Приведём другое решение.

График погашения кредита

Дата	**Долг до выплаты,** тыс. руб.	**Выплата,** тыс. руб.	**Долг после выплаты,** тыс. руб.
01.07.2016	4200		
01.01.2017	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2017		$42r$	
01.07.2017			4200
01.01.2018	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2018		$42r$	
01.07.2018			4200
01.01.2019	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2019		$42r$	
01.07.2019			4200
01.01.2020	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2020		x	
01.07.2020			$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)-x$
01.01.2021	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{r}{100}\right)$		
01.02.2022		x	0

1) $4200\frac{r}{100}\cdot 3+2x=6100.$

2) $4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{r}{100}\right)=x$, откуда

$$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-(3050-63r)\left(1+\frac{r}{100}\right)=3050-63r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21r^2 + 3590r - 38000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 10, \\ r = \dfrac{-3800}{21} \end{array}\right. \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = 10.$$

Расчеты будем вести в тыс. руб.

1. Поскольку в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг клиента будет равен сумме взятого кредита, то в течение первых трех из пяти лет клиент будет выплачивать кредитору лишь процентные начисления за первые три года. Общая сумма выплаченных денежных средств составит $3 \cdot 4200 \cdot 0{,}01r = 126r$ (тыс. руб.). Следовательно, за последние два расчетных года клиент выплатит кредитору $(6100 - 126r)$тыс. руб. А это значит, что суммы выплат 2020 года и аналогичная сумма 2021 года составят по $(3050 - 63r)$(тыс. руб.) каждая.

2. По условию задачи к январю 2020 года долг клиента составит 4200 тыс. руб. В январе 2020 г этот долг возрастет до $4200 \cdot (1 + 0{,}01r) = 4200 + 42r$ (тыс. руб).

С февраля по июнь клиент выплатит кредитору сумму $(3050 - 63r)$тыс. руб. Долг к июлю 2020 г. составит $4200 + 42r - 3050 + 63r = 1150 + 105r$ (тыс. руб.)

3. К январю 2021 года долг клиента составит $(1150 + 105r)$тыс. руб. В январе 2020 г. этот долг возрастет до

$$(1150 + 105r) \cdot (1 + 0{,}01r) = 1150 + 105r + 1150r + 1{,}05r^2 = 1{,}05r^2 + 116{,}5r + 1150 \text{(тыс. руб.)}$$

С февраля по июнь клиент выплатит кредитору сумму $(3050 - 63r)$тыс. руб. Долг будет погашен полностью. Следовательно,

$$1{,}05r^2 + 116{,}5r + 1150 - 3050 + 63r = 0 \Leftrightarrow 105r^2 + 11650r + 115000 - 305000 + 6300r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 105r^2 + 17950r - 190000 = 0 \Leftrightarrow 21r^2 + 3590r - 38000 = 0.$$

$$r = \frac{-1795 \pm \sqrt{3222025 + 798000}}{21} = \frac{-1795 \pm \sqrt{4020025}}{21} = \frac{-1795 \pm 2005}{21}.$$

$$r_1 = \frac{-1795 + 2005}{21} = \frac{210}{21} = 10;$$

$$r_2 = \frac{-1795 - 2005}{2005} < 0.$$

второй корень не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 10.

Задание 18 (С6) № 505569

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а.	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a* ИЛИ установлено, что исходное уравнение при всех значениях *a* имеет единственное решение .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$|x-2| = a\log_2|x-2|$$

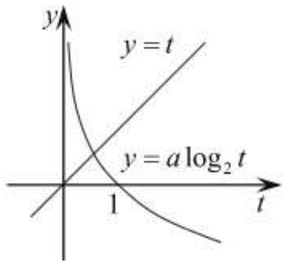
имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $|x-2| = t$ тогда уравнение принимает вид

$$t = a\log_2 t, \qquad (*)$$

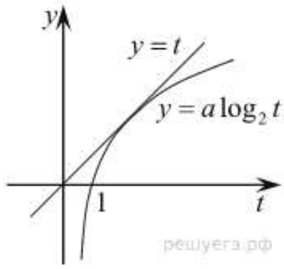
где $t > 0$. Чтобы исходное уравнение имело ровно два решения, уравнение (*) должно иметь единственное решение.



Если $a = 0$, то уравнение не имеет решений.

Если $a < 0$, то уравнение имеет единственное решение (см. рис.).

Если $a > 0$, то уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая $y = t$ касается графика функции $y = a\log_2 t$ (см. рис.), что задаётся системой соотношений:



$$\begin{cases} t' = (a\log_2 t)', \\ t = a\log_2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{a}{t\ln 2}, \\ t = a\log_2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{a}{\ln 2}, \\ t = \dfrac{a\ln t}{\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = t\ln 2, \\ \ln t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e\ln 2, \\ t = e. \end{cases}$$

Заметим, что найденное значение параметра, действительно, положительно.

Ответ: $a < 0$, $a = e\ln 2$.

Задание 19 (C7) № 514713

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) $71+61=4(16+17)$ поэтому если взять по 11 раз числа 16 и 17, то получится подходящий пример.

б) Обозначим сумму всех цифр десятков за a, а всех цифр единиц за b. Тогда $10a+b=363$, $10b+a=2\cdot 363$, откуда $9(b-a)=363$, что невозможно – 363 не кратно 9.

в) Нужно максимизировать выражение $10b+a=10(363-10a)+a=3630-99a$, поэтому a следует сделать как можно меньше. С другой стороны, $9a \geq b$ (поскольку первая цифра числа меньше его последней цифры не более чем в 9 раз), поэтому $363=10a+b \leq 19a$, откуда $a \geq 20$.

Приведем пример – $a=20$, $b=163$, что возможно, например, для трех чисел 19 и семнадцати чисел 18. Новая сумма тогда будет равна $17\cdot 81+3\cdot 91=1650$.

Ответ: а) 17 и 16; б) нет; в) 1650.